NORDISK KUNST- OG LYSTRYK

J Hjelmslev

IV.

Johannes Hjelmslev.

7. april 1873—16. februar 1950.

Tale i Videnskabernes Selskabs møde den 12. maj 1950.

Af **Jakob Nielsen.**

Johannes Trolle Hjelmslev blev født den 7. april 1873 i Hørning ved Århus som søn af sadelmager Niels Peter Petersen og hustru Marie Kirstine Trolle. Han tog realeksamen fra Skanderborg realskole i 1888 og studentereksamen fra Århus Katedralskole i 1890, hvorefter han studerede matematik ved Københavns Universitet. Her blev H. G. Zeuthen i særlig grad hans lærer, desuden T. N. Thiele og Julius Petersen. Allerede i 1894 tog han magisterkonferens med matematik som hovedfag og virkede derefter dels som manuduktør, dels i ti år som lærer ved Borgerdydskolen i Helgolandsgade. Efter at han i 1897 havde taget doktorgraden, blev han i 1903 docent og i 1905 professor i deskriptivgeometri ved Polyteknisk Læreanstalt. Herfra gik han i 1917 over til Københavns Universitet, hvor han så forblev som professor i matematik indtil sin afgang i 1942. – Dette er i korte træk den ydre ramme om et liv, der dels frembyder et billede af rig, skabende udfoldelse inden for det fagområde, Hjelmslev havde valgt, dels vil få varige virkninger gennem den indsats, han ydede for at forbedre arbejdsmulighederne på alle videnskabers område i vort land.

I Hjelmslevs unge år var H. G. Zeuthen den personlighed, der stærkest prægede matematikens stilling i Danmark. I anledning af 100-års dagen for Zeuthens fødsel holdt Hjelmslev i 1939 et foredrag ved mindefesten i Matematisk Forening (84)[1], hvor han begynder med ved siden af Zeuthen at karakterisere dennes

[1] Tal i parentes henviser til numrene i den efterfølgende fortegnelse over J. Hjelmslevs matematiske publikationer.

to jævnaldrende, Julius Petersen og T. N. Thiele, for derefter at give et åndfuldt billede af sin højt beundrede lærer. Der er to sider af Zeuthens livsværk, som vil blive stående til sene tider: dels hans arbejder over matematikens historie, hvor især hans samarbejde med den klassiske filologi i J. L. Heibergs skikkelse er et blivende forbillede for senere tiders forskning i videnskabens historie, dels hans geometriske arbejder, der danner udgangspunktet for hans elevers undersøgelser, specielt for C. Juel. Hvis man søger at bestemme de forgængere, der har været mest retningsgivende for Hjelmslevs matematiske livsgerning, må det fra dansk side blive Zeuthen og Juel og fra udlandets side G. v. Staudt, hvis hovedværk »Geometrie der Lage« (1847) gennem C. Juel kom til fuld virkning her i landet, og David Hilbert, hvis skelsættende bog »Grundlagen der Geometrie« udkom omkring århundredskiftet. Det kan også nævnes, at Hjelmslevs undersøgelser over lineære transformationer (jvf. 28), der i 1907 indbragte deres forfatter Videnskabernes Selskabs guldmedaille, har deres udgangspunkt i T. N. Thieles begrebsdannelser og er foranlediget ved en prisopgave her i Selskabet, der skyldes Thieles initiativ. Ligeledes må det antages, at Julius Petersens lære om geometriske konstruktioner, der er nedfældet i hans kendte bog »Metoder og Teorier«, har haft blivende betydning for Hjelmslev. Men Zeuthens indflydelse er uden sammenligning den betydeligste. Udlandets matematik kom kun til at virke på Hjelmslev gennem dets litteratur, idet han ikke fik lejlighed til at foretage studierejser.

Når man til de hermed antydede emner: de geometriske arbejder, den historiske interesse og grundlagsforskningen, endnu føjer spørgsmålet om matematikens stilling til erfaringsverdenen, der kom til at beskæftige Hjelmslev stærkt, har man de hovedlinier, der går gennem hele hans forfatterskab fra 1895 til 1950. Naturligvis kan man ikke holde disse hovedlinier adskilt, hvis man vil gøre rede for Hjelmslevs udvikling og livsværk og derved vil gå mere i enkeltheder, end det kan ske i en kort mindetale. Disse forskellige interesser griber til stadighed ind over hinanden, uddyber hinanden gensidigt og indgår til sidst i en syntese i en række afhandlinger under fællestitlen »Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre« i Selskabets Matematisk-fysiske Meddelelser strækkende sig over de sidste 20 år (62). – Der kan i aften kun blive tale om at fremdrage nogle karakteristiske træk.

De første arbejder af den unge magister i slutningen af halvfemserne, heriblandt hans første fremtræden i vort Selskabs publikationer (6), er præget af den geometriske skole, han var fremgået af. Blandt andet behandles allerede her den trilineære figur bestående af tre rette linier i rummet og de tre fælles normaler til linierne to og to. Denne svarer til en trekant i den projektive plan eller på kuglen ved en korrespondance, hvor både punkt og linie i planen svarer til linie i rummet således, at både skæringspunktet mellem to linier og forbindelseslinien mellem to punkter svarer til fællesnormalen mellem de tilsvarende linier i rummet. Derved kan man overføre sætninger fra den plane eller sfæriske geometri, specielt differentialformler, til rummets liniegeometri. Overføringsprinciper af denne art er netop noget af det, der indvindes ved at bestemme det endelige system af forudsætninger, et bestemt matematisk område kan reduceres til, og dette og andre overføringsprinciper går da også hyppigt igen i de senere arbejder (4, 13, 97).

I 1897 disputerede Hjelmslev med en afhandling med titlen »Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anvendelser paa Læren om variable Figurer«, der indeholder spiren til hans senere differentialgeometriske arbejder med fremstillingen ved repræsentanter (her kaldt »Fluxioner«) som det gennemgående hjælpemiddel. En derpå grundet geometrisk konstruktion virker som oftest mere elegant end analytisk regning, til hvilken man ellers sædvanlig henfører infinitesimalgeometriske spørgsmål, men de to fremgangsmåder lader sig naturligvis parallelisere. Her i disputatsen hviler fremstillingen endnu ikke på et helt afklaret grænsebegreb, men det sikre grundlag, som analysen blev stillet på i sidste halvdel af det nittende århundrede, måtte naturligvis medføre en tilsvarende sikring af infinitesimalgeometriens fundament. I Hjelmslevs store lærebog i geometri (47), der lå til grund for den højere geometriundervisning i Danmark i en menneskealder, er disse metoder fra disputatsen indordnet under et klart grænsebegreb og systematiseret. Senere følger en betydningsfuld udvidelse af disse metoder, der gør dem uafhængige af metriken, idet grænseforhold erstattes med dobbeltforhold, hvorved fremstillingen bliver projektiv-invariant, således at man får en infinitesimalgeometri i det projektive rum (83).

Andre af de tidlige geometriske arbejder kan ses som en videreførelse af ideer af C. Juel, der havde undersøgt kurvers og fladers geometri uafhængigt af deres analytiske karakter. Hjelmslev indordner nu sine objekter under mængdelærens klare begreber ved f. eks. at definere en plan, konveks bue som en perfekt, sammenhængende punktmængde i planen, der ikke har mere end to punkter fælles med nogen ret linie. Til grund for bestemmelsen af tangenter, oskulationsplaner o.s.v. lægger han begrebet »monoton følge« af punkter, halvlinier o.s.v., som behandles systematisk i en afhandling i Oversigten fra 1914 (35), samme år som han blev medlem af Videnskabernes Selskab. I analysen har man ofte ladet sig lede af geometriske billeder, men disse forsvinder til sidst ud af både problemstillinger og bevismetoder. Det var nu Hjelmslevs agt at føre undersøgelser over kurver og flader tilbage til rent geometriske metoder, også i infinitesimalgeometrien, og derved samtidig at udvide deres område, idet dette omfatter mere end hvad man behersker ved differentiable funktioner (27, 98). Også i sine undersøgelser over ikke-euklidisk geometri, der begynder med året 1900, og til hvilke han ofte vender tilbage, viser han den samme stræben at erstatte analytiske betragtninger med en syntetisk begrundelse, specielt for så vidt angår geometriens imaginære elementer (14); det samme kan siges om de kinematiske undersøgelser (55).

Det var dog næppe disse rent geometriske arbejder, hvis oprindelse og grundtendens jeg har søgt at skitsere, der fra først af slog Hjelmslevs navn fast uden for landets grænser, hvortil også må bemærkes, at hans oprindelige navn, Johannes Petersen, gav anledning til forvekslinger: Man kan konstatere, at nogle arbejder af J. Petersen i den udenlandske litteratur er opført under Julius Petersens forfatterskab. Men efter fremkomsten af hans arbejde »Neue Begründung der ebenen Geometrie« i Mathematische Annalen i 1907 var der ikke mere nogen tvivl. Også her hjemme er hans indsats i spørgsmålet om geometriens grundlag vel nok det, de fleste tænker på, når hans navn nævnes. Det springer også i øjnene, når man blot lader blikket glide hen over fortegnelsen af hans publikationer, i hvor mange titler ordet »grundlag« forekommer. I 1899 var Hilberts »Grundlagen der Geometrie« udkommet, der gav en stringent opbygning af geometrien ud fra et veldefineret system af forudsætninger, der falder i fem grupper: Aksiomer for forbindelsen mellem punkter, linier og planer, ordningsaksiomer, kongruensaksiomer, parallelaksiomet samt kontinuitetsaksiomer, deriblandt Eudoxos' aksiom. Hilberts bog, i hvilken også aksiomernes sammenspil og gensidige uafhængighed blev klarlagt, fik en helt afgørende virkning på hele grundlagsforskningen og fremkaldte mange nye undersøgelser. Hjelmslevs resultat i den nævnte afhandling er nu, at han giver en begrundelse for den almene plane geometri, den euklidiske og ikke-euklidiske under eet, ved forudsætninger, der kan formuleres i en endelig del af planen, altså ikke indeholder noget aksiom om rette liniers skæring eller ikke-skæring og ikke tager rummet til hjælp, og uden kontinuitetsbetragtninger. Samtidig gøres der kun meget ringe brug af anordningsforudsætninger, og i hans senere arbejder (26, jvf. 62, I) lykkes det at eliminere disse helt. I bogen »Vorlesungen über neuere Geometrie« af M. Pasch og M. Dehn, to forfattere, hvis navne er uløseligt knyttet til grundlagsforskningen, skriver Dehn: »Mit dem Hjelmslevschen Resultat haben wir den höchsten Punkt bezeichnet, den die moderne Mathematik über Euklid hinausgehend in der Begründung der Elementargeometrie erreicht hat: in der Ebene, mit Voraussetzungen nur über einen beschränkten Teil der Ebene, ohne Stetigkeit ist die analytische Geometrie zu begründen«. Samtidig viser Hjelmslevs arbejde allerede på dette tidspunkt hans mesterskab i at håndtere de hjælpemidler, der senere stadig går igen i hans arbejder over geometriens grundlag: *spejlingen* som den grundlæggende transformation i planen og *halvdrejningen* (der betyder noget andet end en halv omdrejning) og dennes rolle over for »uegentlige« punkter og linier, hvilke begreber allerede var indført af M. Pasch. – I festskriftet til Zeuthens 70-års fødselsdag udvides betragtningen til rum med et vilkårligt antal dimensioner.

Hjelmslev har, som allerede nævnt, skrevet en lang række afhandlinger om grundlagsspørgsmål, og enkelte af disse skal endnu berøres. Forinden må jeg dog nævne et andet punkt i hans matematiske indstilling, et synspunkt, hvis betydning han aldrig blev træt af at fremhæve: Den teoretiske geometris forhold til den fysiske verden. I hans trykte arbejder fremtræder dette problem første gang i 1913 og indtager derefter i et par årtier en dominerende stilling. Som sine forgængere i problemstillingen nævner han M. Pasch, F. Klein og H. Poincaré (33). Man kan vel antage, at hans virksomhed som professor i deskriptivgeometri ved Polyteknisk Læreanstalt med nær tilknytning til tegneundervisningen har ført ham ind på disse tanker, men måske ligger der også deri en reaktion mod den udvikling af grundlagsforskningen, der havde løst den fra enhver forbindelse med virkeligheden og gjort den til et rent logisk anliggende. Ægypternes praktiske geometri blev til grækernes formalt-deduktive system, så man senere måtte opfinde den særlige betegnelse »geodæsi« for det, der oprindelig var »geometri«. Grækernes grundbegreber ligger den direkte erfaring fjernt, men det er dog først op imod vor tid, nærmere bestemt omkring århundredskiftet, at den teoretiske geometri blev totalt løst fra erfaringsverdenen; først på dette tidspunkt har man magtet det. Det er besnærende, fordi den formale matematiks begreber er simplere at operere med end virkelighedens tilnærmelser, og det er derfor økonomisk at arbejde med dem. At man ikke er stødt på nogen modsigelse mod virkeligheden, forklares ved, at den beregnende og analytiske geometri kan udledes af den virkelige verdens geometri uden de idealiserende forudsætninger. Man står da over for det uafviselige problem at finde almindelige regler, der atter slår bro mellem den formale analyse og anvendelserne. Hjelmslev har givet mange slående eksempler på denne kløft, og så langt vil formentlig alle kunne være enige med ham.

Men Hjelmslev gik videre, idet han førte problemet over i pædagogikens verden. Man skal ikke begynde med abstraktioner, men ende med dem. Definitionerne på de matematiske objekter skal fra begyndelsen svare til de selvkontrolerende fremgangsmåder ved deres fysiske fremstilling. Det er en pædagogisk forsyndelse at forlange beviser for sætninger, der i sig selv er mere indlysende end de forudsætninger, ud fra hvilke man skal bevise dem. At trekantens vinkelsum er lig to rette, kan man godtgøre ved erfaring, men Euklids skæringspostulat, som ligger til grund for beviset, er principielt ukontrolabelt. Først på et mere fremskredent stadium indordnes erfaringsgeometrien i de forskellige analytiske rum, der kan være tale om, og som alle er i stand til at fortolke det begrænsede erfaringsfelt. – Hjelmslev drog selv konsekvensen af sit syn på disse ting ved at skrive et fuldstændigt lærebogssystem, som naturligvis betyder en overordentlig berigelse af vor elementære lærebogslitteratur. Men han var selv klar over, at netop om det pædagogiske sigte, han inddrog i sagen, måtte meningerne være delt blandt hans fagfæller. Han selv fik lejlighed til at prøve metoden i praksis i de ti år fra 1916 til 1926, hvor han underviste i matematik på Statens Lærerhøjskole, og man kan vel formode, at når han påtog sig et så byrdefuldt skolearbejde med ti ugentlige undervisningstimer, vejede ønsket om at gøre disse erfaringer stærkt til.

For enhver beundrer af Hjelmslevs matematiske livsværk er det en tilfredsstillelse at tænke på, at hans mangeårige arbejde med virkelighedens geometri til sidst gik op i en højere enhed med hans undersøgelser over geometriens grundlag, som vi nu vender tilbage til. Det er allerede fremhævet, at et af de karakteristiske træk fra hans afhandling i Mathematische Annalen er dette, at han kun benytter aksiomer, der kan formuleres i en begrænset del af planen, hvorved de er mere virkelighedsnære end Euklids forudsætninger, som Hjelmslev et sted ligefrem betegner som »virkelighedsfjendske«. Som et træk fra virkelighedens geometri, i hvilken to hinanden skærende rette linier i almindelighed må siges at have et lille stykke fælles (jvf. 43), forfølger han konsekvensen af at lade den fordring falde, at to rette linier har entydig skæring, eller anderledes vendt, at to forskellige punkter kun kan have een forbindelseslinie. Han udviklede således – og nu atter på rent logisk-deduktiv basis – en mere almen geometri, der i øvrigt bygges op væsentlig ved de tidligere benyttede grundoperationer, spejlinger og halvdrejninger, hvorved hele bevisteknikken gøres meget ensartet. Resultatet fremkom, som allerede nævnt, i en serie på seks afhandlinger i Matematisk-fysiske Meddelelser under fællestitlen »Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre« i årene fra 1929 til 1949. Det omfatter det gamle arbejde fra Mathematische Annalen og danner dermed kronen på hans arbejde med aksiomatiken. Man vidste, at forskellige metriske systemer lod sig indbygge i projektivgeometrien som deres fælles ramme. Nu viste det sig, at man ud fra et bestemt system af kongruensforudsætninger ved at slække på entydighedskravet nåede frem til mere almene former for projektivgeometri, der omfatter den sædvanlige projektivgeometri som et specielt tilfælde. – Det benyttede system af forudsætninger lader sig ikke afvise som »kunstigt«. Dels har det interesse at vide, at f. eks. et bevis for rektanglets eksistens, der mislykkedes – og måtte mislykkes – for Saccheri og Lambert på det traditionelle grundlag, lader sig føre, når man ved, at entydighedsaksiomet ikke altid er opfyldt. Og frem for alt kan man henvise til, at der findes områder, hvis objekter opfylder de betragtede forudsætninger, og at man derfor er interesseret i at vide, hvilke konsekvenser der følger deraf. (Jvf. eksempler i 62, I.)

Allerede efter fremkomsten af de to første af de nævnte seks meddelelser skrev den unge tyske professor Gerhard Thomsen kort før sin tidlige død en bog »Grundlagen der Elementargeometrie«, der som han selv skriver væsentlig er foranlediget ved disse to afhandlinger. Også i enkeltheder benytter han vidtgående Hjelmslevs værktøj, selv om han i øvrigt forfølger helt andre mål, nemlig at opstille en gruppealgebraisk kalkyle for elementargeometrien.

Hjelmslev betragtede ikke den nævnte serie som afsluttet, men annoncerede i slutningen til den sjette meddelelse forskellige fortsatte undersøgelser, indeholdende bl. a. en definitiv begrundelse af virkelighedsgeometrien.

I sammenhæng med Hjelmslevs arbejder over geometriens grundlag må nævnes hans undersøgelser over geometriske konstruktioner, dels sådanne, der udføres med mere *begrænsede* hjælpemidler end de traditionelle, passer og lineal (63, 82, 91, 101), hvad der har betydelig aksiomatisk interesse, dels sådanne, der benytter sig af *mere* end det ved den traditionelle afgrænsning tilladte. Konstruktioner af den sidstnævnte art betegner han i en i 1913 udgivet bog som »geometriske eksperimenter«. De handler om at tilvejebringe en søgt figur så simpelt og så nøjagtigt som muligt på grundlag af en nøjere matematisk analyse af opgavens art, idet konstruktionen føres tilbage til normer, der står den virkelige udførelse nær. Man vil da i almindelighed gå anderledes frem end i den klassiske konstruktionslære, og samtidig dækker metoden et langt større område af konstruktioner. Der er også her et punkt, hvor den fra Euklids værk stammende tradition næsten helt behersker skoleundervisningen endnu i vore dage. Men i øvrigt er metoden naturligvis ikke uden forbilleder. Man kender fra oldtiden den såkaldte »indskydning« til løsning af opgaver af højere end anden grad, og Hjelmslev udtaler selv, at hans bog på naturlig måde afslutter de af Descartes angivne metoder, der går ud over sædvanlig teoretisk konstruktion.

Efter sin afgang fra Universitetet i 1942 udfoldede Hjelmslev en rent ud forbløffende produktivitet. Alene af de i 1943 udgivne fem publikationer er to af omfattende art: I en bog med titlen »Grundlag for den projektive Geometri« samlede han sine rige erfaringer fra egne projektivgeometriske arbejder og fra grundlagsforskningen i en dybt original fremstilling. Han indleder den med en hyldest til v. Staudt, men slutter sig dog ikke til dennes mening, at man burde begynde geometriundervisningen på et så alment grundlag; her bør vejen gå fra det konkrete til det almene, og en metrisk begrundelse af geometrien ligger den umiddelbare erfaring nærmere end en visuel (projektiv). Den oprindelige plan, at medtage den projektive infinitesimalgeometri i bogen, måtte han opgive, men han gav en uafhængig fremstilling af dens grundlag i en afhandling med titlen »Die Geometrie der schwachen Figuren« i Matematisk-fysiske Meddelelser, i hvilken han udvikler en meget vidt dreven algebra for regning med grænseforhold i projektiv-invariant form.

I hele sit forfatterskab har Hjelmslev ofte sat sin behandling af spørgsmålene i relation til den historiske sammenhæng. Det var en arv fra Zeuthens skole, og grundlagsforskningen opfordrede yderligere dertil. Således har han gentagne gange udredet den rolle, som Eudoxos' aksiom har spillet, og han udviklede selv begyndelsesgrundene til en geometri, hvori det ikke antages gyldigt (53, 92). Han har også påvist, at man kan få et simplere aksiomsystem ved at erstatte Eudoxos' proportionslære med en proportionslære grundet på ligestort rektangelareal (76). Et betydningsfuldt arbejde fra hans hånd fremkom i Matematisk-fysiske Meddelelser i dette år, og man vil erindre hans fremlæggelse af det her i Selskabet: En overbevisende redegørelse for forskellen mellem Archimedes' størrelseslære, således som den særlig får udtryk gennem det såkaldte Archimedes' lemma, og den i Euklids Elementer indeholdte, fra Eudoxos stammende teori (103, jvf. 70 og 72).

I afhandlingerne fra de senere år findes der mange henvisninger til planlagte senere publikationer; muligvis vil nogle af disse kunne realiseres af efterladte papirer. Livet har ikke givet ham stunder til at fuldføre alt. Men man kan også se det sådan, at Hjelmslev havde den lykke at kunne vedblive at fuldføre såvel som at planlægge nyt lige til det sidste. Både i denne direkte og i dybere betydning svarede han til den maksime, som udtrykkes i Goethes livsvisdom: Nie geschlossen, oft geründet.

Jeg har forsøgt i korte træk at give et billede af matematikeren Hjelmslev. Men vi ved alle, at Johannes Hjelmslevs betydning for det danske samfund ikke er udtømt med hans egen videnskabelige indsats. Hvad han har betydet som lærer ved Polyteknisk Læreanstalt og ved Universitetet, som dettes rektor i 1928–29, som medlem af konsistorium og af Rask-Ørsted-fondets bestyrelse og ikke mindst som medlem af Carlsbergfondets direktion i mere end 30 år, skal jeg ikke udtale mig nærmere om, da jeg ikke har førstehåndskendskab til det; men jeg kan henvise til, hvad formanden for Carlsbergfondets direktion fornylig udtalte her i Selskabet. De administrative pligter i de nævnte og i mange andre hverv tog gennem årtier meget af Hjelmslevs tid, til tider så meget, at der ikke levnedes ham stunder til videnskabeligt arbejde. Jeg husker, at han, der ellers ikke yndede at klage, en gang for mange år siden sagde: »Jeg får kun tid til at tænke på matematik, når jeg sidder i en sporvogn«. Hertil bidrog, at han gjorde arbejdet selv. Jeg sagde en gang til ham, at han aldrig havde lært den kunst at benytte andres arbejde, og det gav han mig ret i. Som den formens mester han var, koncipere de han helst alle skrivelser selv. Han virkede ofte streng, og hans udtalelser havde til tider klang af en absolut og indiskutabel dom, men vi vidste alle, at bagved lå der en redelig vilje til at vise retfærdighed og til at fremme videnskabens tarv i enhver sag, hvis berettigelse han indså. Netop når det drejede sig om at forene et sagligt synspunkt med hensynet til en bestemt person, overraskedes man ofte ved, at han viste en varme, der forlenede hans stærke personlighed med en særegen tiltrækning.

I vort Selskab har han i de 36 år, han var dets medlem, spillet en betydelig rolle og har i tidens løb beklædt hverv som revisor, som medlem af og formand for kassekommissionen og som formand for den naturvidenskabelig-matematiske klasse. Vi har alle hans deltagelse i vore forhandlinger om Selskabets mærkesager i levende erindring, og i arkivet findes mange indlæg skrevet i hans smukke håndskrift. Han veg ikke tilbage for at tale med patos, når han fandt den berettiget. I det førnævnte foredrag på Zeuthens 100-års dag sluttede han i følgende ord med en hyldest til Zeuthens minde »i beundring og taknemlighed for den glans, hvormed hans navn lyser over lande, for den lære han gav os, for den indsats, han har ydet i de institutioner, han viede sin tjeneste, Universitetet, Danmarks tekniske Højskole, Videnskabernes Selskab, også i denne vor hjemlige Matematiske Forening, i alt og for alle, som stod hans hjerte nær, for det retsind, der var hans karakter, den ridderlighed, der var hans færd, og den ildhu, der var hans gerning«.

Nu hvor Johannes Hjelmslev ikke mere er iblandt os, må det være os efterlevende tilladt at sige, at han selv holdt det mål, som han dengang aftegnede med disse ord om sin beundrede lærer. Også i dette Selskab, som han lige til det sidste omfattede med aldrig svækket interesse, vil vi holde hans minde i ære.

Fortegnelse over
professor Johannes Hjelmslevs matematiske publikationer.

NTM = Nyt Tidsskrift for Matematik.
MT = Matematisk Tidsskrift.
Oversigt = Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger.
MFM = Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser.
SN = Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 7. Række, Naturvidenskabelig og matematisk Afdeling.
Skand. = Beretning om Skandinaviske Matematikerkongresser.
Intermédiaire = Intermédiaire des Mathématiciens.
(Indtil 1904 er forfatternavnet Johannes Petersen.)

1895. 1. Problemet om de i en vindskæv Firkant indskrevne Kugler. NTM 1895 B.
1897. 2. Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anvendelser paa Læren om variable Figurer. Gjellerups Forlag. Kjøbenhavn 1897.
1898. 3. Nogle Sætninger om kongruente Figurer. NTM 1898 B.
4. Den trilineære Figurs Geometri. NTM 1898 B.
5. Géométrie des droites dans l'espace. Intermédiaire t.V, 1898.
6. Nouveau principe pour études de géométrie des droites. Oversigt 1898.
1899. 7. En Konstruktion af den vindskæve Hyperboloides Striktionslinie. NTM 1899 B.
1900. 8. Kongruenssætningerne for fuldstændig bestemte sfæriske Trekanter. NTM 1900 B.
9. Sur les polygons dont tous les angles sont droits. Intermédiaire t.VII, 1900.
10. Géométrie de trois droites dans l'espace non-euclidien. Oversigt 1900.
1901. 11. Om Cirkelperiferiens Længde. NTM 1901 A.
12. Om Planens Definition. NTM 1901 B.
13. Sammenhængen mellem Liniegeometrien og den sfæriske Geometri. NTM 1901 B.

14. Bidrag til en syntetisk Fremstilling af den ikke-euklidiske Geometri. I—II NTM 1901 B, III NTM 1902 B.

1903. 15. Hexagramme de Pascal. Intermédiaire t. X 1903.

16. Om konvekse Legemer. NTM 1903 A.

17. Et Bevis for Pascals Sætning. NTM 1903 B.

18. Trigonometrien i den ikke-euklidiske Plan. NTM 1903 B.

1904. 19. Descriptivgeometri. Grundlag for Forelæsninger paa Polyteknisk Læreanstalt. Gjellerups Forlag. København 1904.

1905. 20. Om konvekse Omraader. NTM 1905 B.

1907. 21. Kongruens og Symmetri. NTM 1907 B.

22. Om Grundlaget for Læren om simple Kurver. NTM 1907 B.

23. Neue Begründung der ebenen Geometrie. Mathematische Annalen 64, 1907.

1909. 24. Om Rum af uendelig mange dimensioner. Festskrift til H. G. Zeuthen. København 1909.

25. Sur les principes fondamentaux de la géométrie. 1. Skand., Stockholm 1909.

1911. 26. Nye Undersøgelser over Geometriens Grundlag. 2. Skand., København 1911.

27. Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle. Oversigt 1911.

28. Om Regning med lineære Transformationer. SN VI. 7. 1911.

1912. 29. Differentialgeometri og Differentialregning. NTM 1912 B.

1913. 30. Om Grundlaget for den praktiske Geometri. NTM 1913 A. (Udvidet gengivelse af et på Polyteknisk Læreanstalt holdt foredrag, der også findes publiceret særskilt.)

31. Virkelighedens Geometri. 3. Skand., Oslo 1913.

32. Geometriske Eksperimenter. Gjellerups Forlag. København 1913.

1914. 33. Die Geometrie der Wirklichkeit. Acta Mathematica 40, 1914.

34. Darstellende Geometrie. Teubner, Leipzig 1914.

35. Introduction à la théorie des suites monotones. Oversigt 1914.

36. Grundlag for Fladernes Geometri. SN XII. 1. 1914.

1915. 37. Geometrische Experimente. Teubner, Leipzig 1915.

38. En Konstruktionsopgave af 6. Grad. NTM 1915 A.

39. Om Opgaver til Løsning ved »geometrisk Eksperiment«. NTM 1915 A.

40. Om Indhyllingskurver for Systemer af rette Linier. NTM 1915 B.

1916. 41. Geometriens naturlige Grundlag. NTM 1916 A.

42. Det naturlige Grundlag for Læren om reelle Tal. NTM 1916 A.

43. Om den rette Linies Bestemmelse ved to Punkter. Oversigt 1916.

44. Elementær Geometri I—IV. Gjellerups Forlag. København 1916—23.

1917. 45. De reelle Tals Anvendelse paa Geometri. NTM 1917 A.
1918. 46. En Sætning om Trekantens Røringscirkler. NTM 1918 A.
47. Lærebog i Geometri. Gjellerups Forlag. København 1918.
1919. 48. Stereometriske Konstruktioner. Gjellerups Forlag. København 1919.
49. Trekantens Vinkelsum. MT 1919 A.
50. Det øjeblikkelige Drejningspunkt. MT 1919 B.
1921. 51. Tre Foredrag over Geometriens Grundlag. I. Den rette Vinkel. II. Kongruens. MT 1921 B. III. Tal og Maal. MT 1922 B.
1923. 52. Die natürliche Geometrie. Hamburger mathematische Einzelschriften 1923.
1925. 53. Die nicht-Eudoxische Mathematik. 6. Skand., København 1925.
54. Om Polygoner og Polyedre. MT 1925 B.
55. Über die Grundlagen der kinematischen Geometrie. Acta Mathematica 47, 1925.
1926. 56. Ikke-euklidisk Geometri og Cirkelgeometri. MT 1926 B.
57. Elementær Aritmetik I—III. Gjellerups Forlag. København 1926—31.
58. Den lille Geometri. Gjellerups Forlag. København 1926.
59. Sur les invariants des séries entières. Comptes rendus de l'Ac. d. Sc. Paris, t. 184, 1926.
1928. 60. Om et af den danske Matematiker Georg Mohr udgivet Skrift »Euclides Danicus« udkommet i Amsterdam 1672. MT 1928 B.
1929. 61. Matematiken og dens Betydning. MT 1929 A.
62. Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre.

Erste Mitteilung	MFM	VIII. 11. 1929.
Zweite —	MFM	X. 1. 1929.
Dritte —	MFM	XIX. 12. 1942.
Vierte —	MFM	XXII. 6. 1945.
Fünfte —	MFM	XXII. 13. 1945.
Sechste —	MFM	XXV. 10. 1949.

1930. 63. Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmasses. Opuscula mathematica A. Wiman dedicata 1930.
1931. 64. Irrationale Tal. Gjellerups Forlag. København 1931.
65. Beiträge zur Lebensbeschreibung von Georg Mohr (1640—1697). MFM XI. 4. 1931.
1932. 66. Geometrisk Analyse I—III. Gjellerups Forlag. København 1932—33.
1933. 67. Nogle Bemærkninger i Anledning af Forslaget vedrørende Gymnasiets Undervisning i Matematik. MT 1933 A.
1934. 68. Den pythagoreiske Læresætning. MT 1934 A.
69. Nogle Studier over Produktforhold. MT 1934 B.
70. Exhaustionsbeviset hos Euklid. MT 1934 B.
71. Ikke-euklidisk Geometri og Projektivgeometri. MT 1934 B.
72. Exhaustionsbeviser og almindelig Størrelseslære hos Archimedes. MT 1934 B.

73. Die graphische Geometrie. 8. Skand., Stockholm 1934.

1935. 74. Mindeord om C. Juel. Oversigt 1934—35.

75. Virkelighedsgeometriens Betydning. MT 1935 A.

76. Areallærens principielle Betydning i Euklids Geometri. MT 1935 A.

1936. 77. Om Talstrækninger. MT 1936 A.

78. Ligedannethed som Størrelsesprincip. MT 1936 A.

1937. 79. En Afbildning af den komplekse Plan med euklidisk Metrik. MT 1937 B.

80. Descartes' Løsning af Ligningen af 6. Grad. MT 1937 A.

81. Analyse og Syntese. MT 1937 A.

1938. 82. Konstruktion ved Passer med fast Indstilling, uden Brug af Lineal. MT 1938 A.

83. Infinitesimale Elemente im projektiven Raum. 9. Skand., Helsingfors 1938.

1939. 84. Hieronymus Georg Zeuthen. MT 1939 A.

85. La géométrie sensible. I—II. L'enseignement mathématique. 1939—42.

1941. 86. Om Kurverne i et Nulsystem. Norsk Matematisk Tidsskrift 1941.

1943. 87. Grundlag for den projektive Geometri. Gyldendals Forlag. København 1943.

88. Eksempler paa geometriske Undersøgelser over Integralkurver i Rummet. Festskrift til Professor, Dr. phil. J. F. Steffensen. København 1943.

89. Die Geometrie der schwachen Figuren. MFM XX. 21. 1943.

90. Om Indskydninger. MT 1943 B.

91. Konstruktioner med normeret Lineal. MT 1943 B.

1944. 92. Beiträge zur nicht-Eudoxischen Geometrie, I—II. MFM XXI. 5. 1944.

1945. 93. Den pythagoreiske Læresætning. MT 1945 B.

94. En Forelæsning over ikke-euklidisk Geometri. MT 1945 A.

1946. 95. Euclides ab omni naevo vindicatus. MT 1946 A.

96. Berøringsinvarianter. 10. Skand., København 1946.

1948. 97. Kongruenslærens Fundamentalsætning. MT 1948 A.

98. Bidrag til den descriptive Kurveteori. MT 1948 B.

99. Om en Klasse bikvadratiske Kurver. MT 1948 B.

100. Om Banekurverne for en variabel Trekant. MT 1948 B.

1949. 101. Om Grundlaget for Passerens Geometri. MT 1949 B.

102. Om Geometriens almene Grundlag. 11. Skand., Trondheim 1949.

1950. 103. Über Archimedes' Grössenlehre. MFM XXV. 15. 1950.

104. Antik og moderne Størrelseslære. MT 1950 A.